

GEOMETRIA ALGEBRAICA 2010

EJERCICIOS ADICIONALES B

Ejercicio B.1 (Producto de VAA/K.)

a) Sea K un cuerpo y sean n, m numeros naturales. Sea p la biyeccion canonica $p : K^n \times K^m \rightarrow K^{n+m}$ definida por

$$p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

Consideramos K^{n+m} con la topologia de Zariski y dotamos al producto cartesiano $K^n \times K^m$ de la unica topologia tal que p es un homeomorfismo (la llamamos topologia de Zariski en el producto cartesiano). Sean $X \subset K^n, Y \subset K^m$ conjuntos algebraicos. Dotamos a $X \times Y$ de la topologia inducida.

a) Describir el ideal del conjunto algebraico $p(X \times Y) \subset K^{n+m}$.

b) Demostrar que el anillo de coordenadas de este conjunto algebraico es isomorfo al producto tensorial $K[X] \otimes_K K[Y]$.

c) Demostrar que $X \times Y$ satisface la propiedad universal de un producto en la categoria de variedades afines (y tambien en la categoria de VAA/K).

d) Sean X, Y dos VAA/K. Construir una VAA/K, que denotaremos $X \times Y$, que satisface la propiedad universal de producto en la categoria de VAA/K.

Sug.: Suponer en primer lugar que X es afin. Sea $Y = \cup Y_i$ un cubrimiento por abiertos afines. Proceder via pegado de las variedades afines $X \times Y_i$. Luego hacer el caso general.

e) Demostrar que $P^n \times P^m$ (producto cartesiano conjuntista, con la estructura de VAA/K definida en Adicionales A) es un producto de P^n y P^m en la categoria de VAA/K.

d) Si $X \subset P^n$ y $Y \subset P^m$ son conjuntos algebraicos proyectivos demostrar que $X \times Y \subset P^n \times P^m$ (producto cartesiano conjuntista, con la estructura de VAA/K inducida como cerrado de $P^n \times P^m$) es un producto de X y Y en la categoria de VAA/K.

Ejercicio B.2 (Inmersion de Segre.)

Sea $s : P^n \times P^m \rightarrow P^{nm+n+m}$ definida por

$$s(x, y) = (x_i y_j)_{(i,j)}$$

(aqui consideramos elegido un orden entre los pares (i, j) , ver proximo ejercicio para una formulacion intrinseca en donde no es necesario elegir un tal orden).

a) Describir el conjunto imagen $S = s(P^n \times P^m)$ y ver que es un conjunto algebraico proyectivo. Escribir un conjunto de ecuaciones homogeneas que lo definen.

b) Demostrar que la co-restriccion $s : P^n \times P^m \rightarrow S$ es un isomorfismo (o sea, s es una inmersion).

Sug.: Para definir $s^{-1} : S \rightarrow P^n \times P^m$ tomar un cubrimiento afin apropiado de S .

c)(*) Dar un conjunto finito de generadores del ideal de S .

Nota: Este ejercicio es similar a uno en Hartshorne, pero el no habla de VAA/K y por eso la formulacion es un poco diferente.

Ejercicio B.3 (Inmersion de Segre, escritura matricial.)

Es conveniente escribir la inmersion de Segre del modo siguiente:

$$\bar{s} : P^n \times P^m \rightarrow PK^{(n+1) \times (m+1)}$$

(espacio proyectivo asociado al espacio vectorial de matrices $(n+1) \times (m+1)$) definida por

$$\bar{s}(x, y) = (x_i y_j)_{(i,j)}$$

Verificar que la imagen de \bar{s} es el conjunto de matrices de rango uno. Por lo tanto, la variedad de Segre es el conjunto de ceros de los menores dos por dos de una matriz generica. (Al elegir un orden de los pares (i, j) se identifica esta escritura con la del ejercicio anterior.)

Sug.: Notar que $\bar{s}(x, y) = x \cdot y^t$ (producto de matrices, donde x e y son considerados como vectores columna). Usar que una transformacion lineal $K^{n+1} \rightarrow K^{m+1}$ tiene rango uno sii se factoriza por K .

Nota: Entonces B.2 c) resultaria de demostrar que el ideal del conjunto de matrices de rango uno esta generado por los menores 2×2 .

(Este resultado vale, mas en general, para las variedades de matrices de rango menor o igual a r , para todo r ; ver despues.).

Ejercicio B.4 (Inmersion de Segre, formulacion intrinseca.)

Sean U, V dos espacios vectoriales de dimension finita sobre el cuerpo K . Consideramos la aplicacion K -bilineal universal

$$b : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$$

del producto cartesiano al producto tensorial, $b(u, v) = u \otimes v$.

- a) Ver que b es un morfismo de VAA/K
- b) Ver que b pasa al cociente e induce un morfismo de VAA/K

$$Pb : PU \times PV \rightarrow P(U \otimes_K V)$$

- c) Verificar que Pb se identifica, eligiendo bases, con la aplicacion de Segre anterior.

d) Para espacios vectoriales U, V (de dimension finita) definir el isomorfismo canonico $U^* \otimes V \rightarrow \text{Hom}(U, V)$. Ver que la inmersion de Segre intrinseca en este caso coincide (al elegir bases convenientes) con la version matricial de B.3.

e) (aplicaciones lineales proyectivas, esto podria haber sido un ejercicio anterior) Sean U, V dos K -espacios vectoriales y $f : U \rightarrow V$ una aplicacion lineal. Demostrar que si f es inyectiva entonces induce por pasaje al cociente un morfismo $Pf : PU \rightarrow PV$ inyectivo, cuya imagen es una variedad lineal (conjunto algebraico definido por ecuaciones lineales). Demostrar que si f tiene nucleo $A = \ker(f)$ entonces induce por pasaje al cociente un morfismo racional $Pf : PU \rightarrow PV$ cuyo dominio es $PU - \pi(A)$. (Denotamos $\pi(A)$ a la imagen de $A - \{0\}$ por el morfismo canonico $\pi : U - \{0\} \rightarrow PU$. Notar que $\pi(A)$ es una variedad lineal que se identifica naturalmente con PA). Se dice que Pf es la proyeccion de PU en PV con centro PA .

- f) Sea $F : P^n \times P^m \rightarrow P^r$ un morfismo de variedades definido por

$$F(x, y) = (F_0(x, y) : \cdots : F_r(x, y))$$

donde cada F_i es bilineal. Demostrar que existe una factorizacion (unica)

$$F = L \circ s$$

donde s es la inmersión de Segre y $L : P^{nm+n+m} \rightarrow P^r$ es lineal como en e).

Sug.: Usar la propiedad universal del producto tensorial.

Ejercicio B.5 (Inmersión de Segre, varios espacios proyectivos.)

a) Sean r y n_1, \dots, n_r números naturales. Definir el morfismo de Segre con dominio un producto de r espacios proyectivos:

$$s : P^{n_1} \times \dots \times P^{n_r} \rightarrow P^N$$

Ver que el conjunto imagen S es una variedad algebraica, encontrando ecuaciones que la definen. Considerar los casos mas sencillos, como $r = 3$, o $n_i = 1$ para todo i .

b)(*) Ver que las ecuaciones propuestas generan el ideal de S .

c) Considerar la formulación intrínseca

$$P\mu : PU_1 \times \dots \times PU_r \rightarrow P(U_1 \otimes \dots \otimes U_r)$$

donde μ es la aplicación r -lineal universal. Notar que la imagen (variedad de Segre) consiste de los tensores elementales (= totalmente descomponibles).

d) Generalizar B.4 f).

Nota: Para mas detalles sobre este ejercicio se puede ver la reciente Teoría de Hiperdeterminantes de Gelfand-Kapranov-Zelevinsky.

Ejercicio B.6 (Sard para VAA/K)

Enunciar y demostrar un analogo del teorema de Sard para funciones regulares entre variedades algebraicas.